



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

ข้อตกลง กำหนดสัญลักษณ์ต่างๆให้ดังนี้

\mathbb{C} แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

\mathbb{R} แทนเซตของจำนวนจริง

\mathbb{Q} แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

\mathbb{Q}' แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

\mathbb{Z} แทนเซตของจำนวนเต็ม

\mathbb{N} แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

\emptyset แทนเซตว่าง

สำหรับเซต A ใดๆ ที่เป็นจำกัด

$n(A)$ หมายถึงจำนวนสมาชิกของเซต A และ $P(A)$ หมายถึง เพาเวอร์เซตของ A

ตอนที่หนึ่ง ข้อ 1 – 12 ตอบถูกได้คะแนนข้อละ 4 คะแนน

ไม่ตอบได้คะแนนข้อละ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. กำหนดให้ i, t, m, c เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ

$$t = \log_3 i, m = \log_4 i, c = \log_6 i$$

จงหาค่าของ $\frac{2}{t} + \frac{1}{m} - \frac{2}{c}$

A. 1

B. 2

C. $\log_i 2$

D. 0

E. $\log_6 i$

2. กำหนดให้ $f(n) = \log_3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ และ $g(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกสองหลักที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $g(k)$ เป็นจำนวนเต็มบวก

จงหาผลบวกของเลขโดดในหลักสิบและหลักหน่วยของ k

A. 5

B. 7

C. 8

D. 11

E. 13



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

3. กำหนดให้ $x = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$

จงหาค่าของ $\sin x$

A. 0

B. $\frac{4}{9}$

C. $-\frac{4}{9}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

E. $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$

4. กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} m \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ xy

ถ้า \vec{u} และ \vec{v} ตั้งฉากกัน

แล้ว จงหาค่าของ m

A. -5

B. 5

C. 10

D. -10

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

5. กำหนดให้ z, w เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $i^2 = -1$

ถ้า $z = \frac{25}{63} + \frac{63}{25}i$ และ $w = \frac{101}{63} - \frac{13}{25}i$

แล้ว ค่าของ $(z + w)^{2020}$ ตรงกับข้อใด

A. 2^{2020}

B. 2^{1010}

C. 2^{505}

D. $2^{1010}(1 + i)$

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูก

การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

6. กำหนดลำดับของตัวอักษรดังนี้ $T, M, C, T, H, A, I, L, A, N, D$, 8 โดยที่ตัวอักษรเดียวกันถือว่าเหมือนกัน

เมื่อนำตัวอักษรข้างต้นทุกตัวมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นคำโดยไม่คำนึงถึงความหมาย ให้ x แทนจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนที่สระในภาษาอังกฤษจะไม่อยู่ติดกันเลย

จงหาค่าของ $\frac{x}{10!}$

($n!$ แทนผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n)

และ สระในภาษาอังกฤษมี 5 ตัว คือ A, E, I, O, U)

- A. 12
D. 30

- B. 18
E. 36

C. 24

7. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 ที่นิยามโดย

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & -x & 1 \\ -x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหาว่ามีจำนวนเต็ม x ทั้งหมดกี่จำนวนที่สอดคล้องกับอสมการ $\det(A) > -10$

- A. 7
D. 4

- B. 6
E. มากมายไม่จำกัด

C. 5

8. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$

จงหาค่าของ $f(-20)$

- A. 2
D. -1

- B. 1
E. ข้อมูลไม่เพียงพอ

C. 0

การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

9. กำหนดให้ \vec{u}, \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในระนาบ xy ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ครบทุกข้อ

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ (2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ (3) $\vec{v} \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = 1$

จงหาค่าของ $20|\vec{u}|^2 + 20|\vec{v}|^4$

- A. 10 B. 15 C. 20
D. 30 E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

10. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

จงหาว่าจะสามารถสร้างฟังก์ชัน $f : A \rightarrow A$ ที่เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและหนึ่งต่อหนึ่งได้ทั้งหมดกี่ฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า $f(2) = 2$ และ $f(5) = 5$ และ $f(6) = 6$ และ $f(3) = 3$

- A. 3125 B. 1440 C. 720
D. 120 E. 24

11. กำหนดให้ A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 3×3 ที่ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่ไม่เอกฐาน และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (1) $AB = BA$
(2) $\det(I + AB) = \det(I + BA)$
(3) $\text{adj}(AB) = \text{adj}(A)\text{adj}(B)$
(4) $\det(\text{adj}(AB)) = \det(\text{adj}(A))\det(\text{adj}(B))$

จากข้อความข้างต้นมีกี่ข้อความที่กล่าวถูกต้อง

- A. 2 B. 1 C. 0
D. 3 E. 4



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

12. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ d

ถ้า $a_{2020} = 2563$ และ $a_{2563} = 2020$

แล้ว จงหาค่าของ a_{4583}

A. 4582

B. 4583

C. 9164

D. 9166

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

ตอนที่สอง ข้อ 13 – 24 ตอบถูกได้คะแนนข้อละ 6 คะแนน

ไม่ตอบได้คะแนนข้อละ 1.5 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

13. กำหนดให้ S แทนเซตคำตอบของสมการ $x^{1+\log_{0.5} x} > 0.25x$

ถ้า $S = \{x \in \mathbb{R} \mid p < x < q\}$ โดยที่ p, q เป็นจำนวนจริงบวก

จงหาค่าของ $(\log_2 p)^2 + (\log_2 q)^2$

A. 0.5

B. 1

C. 2

D. 4

E. 8

14. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \log_2(|x| - |y|)^2 \geq 2\}$

$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \log(2^{|x|}) + \log(2^{|y|}) \leq \log 16\}$

พื้นที่ของอาณาบริเวณของความสัมพันธ์ $r_1 \cap r_2$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย

A. 4

B. 8

C. 16

D. 24

E. 28



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ใช่สามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$\sin A + \sin B = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{และ} \quad \cos A + \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ถ้า $\sin C$ อยู่ในรูป $\sqrt{\frac{r}{s}}$ โดยที่ r, s เป็นจำนวนเต็มที่ ห.ร.ม. ของ r, s เท่ากับ 1

แล้ว จงหาค่าของ $r + s$

A. 4

B. 7

C. 17

D. 27

E. 31

16. ให้ X แทนเซตคำตอบของสมการ $x - 8 = [\log_2(x - 8)]^{\log_2(x-8)}$

จงหาผลรวมของทุกสมาชิกในเซต X

A. 12

B. 20

C. 21

D. 31

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

17. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริง $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$

ถ้าสุ่มเลือกจำนวนเต็มบวกสองจำนวนจากเซต $\{2, 5, 6, 3\}$

จำนวนแรกให้เป็น m และจำนวนที่สองให้เป็น n ซึ่ง m และ n ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน

แล้ว ความน่าจะเป็นที่สมการ $X^T A X = 1$ จะมีกราฟเป็นวงรีที่แกนเอกอยู่บนแกน x มีค่าเท่ากับเท่าใด

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{3}{8}$

E. $\frac{1}{8}$

18. จงหาว่ามีจำนวนจริง $x \in [0, 20\pi]$ ทั้งหมดกี่จำนวนที่ทำให้

$$\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\} = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$$

A. 25

B. 30

C. 40

D. 60

E. 80



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

19. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ และ $g(x) = \sqrt{63 - x}$

ถ้า $D_{f \circ g} = [a, b]$ และ $R_{f \circ g} = [c, d]$ โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

แล้ว จงหาค่าของ $a + b + c + d$

A. 106

B. 88

C. $15 + \sqrt{63}$

D. $25 + \sqrt{63}$

E. หาค่าไม่ได้

20. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากของสมการ

$$z^3 = 20 + 20i \text{ โดยที่ } i^2 = -1$$

จงหาค่าของ $\operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2) \cdot \operatorname{Re}(z_3)$

A. 20

B. $4\sqrt{2}$

C. -5

D. 5

E. -20



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

21. กำหนดให้เอกพหุสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ S ปริภูมิตัวอย่างเป็นเซตคำตอบของสมการ $z^4 + z^2 + 1 = 0$

เมื่อสุ่มเลือกจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันในเซต S มาสองจำนวน

จงหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนสองค่าที่สุ่มมาได้นั้นเป็นจำนวนจริง

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{3}{4}$

22. ให้ i เป็นจำนวนจริงบวกที่มีค่ามากกว่า 1

และ t, m, c เป็นสามพจน์ที่เรียงติดกันในลำดับเรขาคณิตโดย $t > 1, m > 1, c > 1$

และอัตราส่วนร่วมของลำดับนี้มีค่ามากกว่า 1

ค่าของ $\frac{(\log_m i)(\log_{t^2} c - \log_c \sqrt{t})}{\log_t i^2 - 2\log_c i}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

A. 0.5

B. $\frac{1}{4}$

C. $\log_m(tc)$

D. 2

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

23. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่ง $\angle ACB = 120^\circ$

ให้ I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่แนบในสามเหลี่ยม ABC

ถ้า $AI = \sqrt{7}$ หน่วย และ $BI = \sqrt{21}$ หน่วย

แล้ว จงหาว่าด้าน AB ยาวกี่หน่วย

A. $2\sqrt{7}$

B. $\sqrt{42}$

C. 7

D. 14

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูก

24. กำหนดให้ $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + dx + 25$ โดยที่ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $P(x)$ มีราก n ค่าที่แตกต่างกันและแต่ละตัวสามารถเขียนได้ในรูป $p + qi$

โดยที่ p, q เป็นจำนวนเต็มและ $q \neq 0$

แล้ว จงหาว่ามีพหุนาม $P(x)$ อยู่ทั้งหมดกี่พหุนาม

A. 48

B. 30

C. 26

D. 20

E. 16



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

ให้นักเรียนใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ต่อไปนี้เพื่อตอบคำถามข้อที่ 25 – 30

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จำนวนเต็มที่ยิ่งมากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x จะเขียนแทนด้วย $\lfloor x \rfloor$ เรียกว่า ส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม (integer part) ของ x และ เรียก $x - \lfloor x \rfloor$ ว่า ส่วนที่เป็นทศนิยม (decimal part) ของ x เขียนแทนด้วย $\{x\}$

จากบทนิยามเราจะพบว่าสำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จะสามารถเขียนได้ในรูป $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

ตัวอย่าง $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 6.25 \rfloor = 6$, $\lfloor -6.25 \rfloor = -7$, $\left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor = 3$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\lfloor x \rfloor$ และ $\{x\}$ มีสมบัติต่อไปนี้

- (1) $0 < \{x\} < 1$ ทุกค่า $x \in \mathbb{R}$
- (2) $\{x\} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \in \mathbb{Z}$
- (3) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$
- (4) ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$
- (5) $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\lfloor x \rfloor$ ยังมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าฟังก์ชันพื้น (Floor function)

และได้กำหนดสัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ เรียกว่าฟังก์ชันเพดาน (Ceiling function)

โดยที่มีความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันทั้งสองนี้คือ $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

ตอนที่สาม ข้อ 25 – 29 ตอบถูกได้คะแนนข้อละ 7 คะแนน

ตอบผิด หรือไม่ตอบได้ 0 คะแนน

ในกรณีที่นักเรียนคำนวณได้คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ตอบเป็นจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงที่สุด และในกรณีที่นักเรียนคำนวณได้คำตอบที่มีค่ามากกว่าห้าหลัก ให้ตอบเฉพาะตัวเลขในห้าหลักสุดท้าย

กำหนดลำดับของจำนวนเต็มบวก $a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ และ $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$

25. กำหนดให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ m และ n เท่ากับ 1 ที่สอดคล้องกับ

$$\frac{m}{n} = \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdots a_{99} \cdot a_{101} \cdot a_{103}}{a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdots a_{100} \cdot a_{102} \cdot a_{104}}$$

จงหาค่าของ $m + n$

26. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ทำให้ $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{2562} \cdot a_{2563}}{2^n}$ เป็นจำนวนเต็ม



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

27. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 2020 ซึ่งทำให้ $\sqrt{S_{2020} - S_k}$ เป็นจำนวนเต็ม

28. กำหนดให้ $a = \{\sqrt{20}\}$ และ $b = \{\sqrt{19}\}$

จงหาค่าของ $\left| \frac{3a^2 - 4b^2}{3a - 4b} \right|$

29. กำหนดให้ n ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องจากข้อ 28

จงหาจำนวนเต็ม x ที่มากที่สุดที่สอดคล้องกับสมการ $\left\lfloor \sqrt{\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor} \right\rfloor = \frac{n^2}{32}$



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

ข้อโบนัส นักเรียนเลือกทำ หรือไม่ทำก็ได้

ถ้าตอบถูกจะได้ 20 คะแนน ตอบผิดได้ -7 คะแนน ไม่ตอบได้ 0 คะแนน

ในกรณีที่นักเรียนคำนวณได้คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ตอบเป็นจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงที่สุด และในกรณีที่นักเรียนคำนวณได้คำตอบที่มีค่ามากกว่าห้าหลัก ให้ตอบเฉพาะตัวเลขในห้าหลักสุดท้าย

30. กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากที่สุดที่สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = \frac{12}{x}$$

ถ้า k สามารถเขียนได้ในรูป $a - \sqrt{b}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้ว จงหาค่าของ $a + b$

เฉลยคำตอบ TMC@8 รอบประเมินศักยภาพ

Q	น.5
1	D
2	C
3	E
4	A
5	E
6	B
7	C
8	C
9	B
10	D
11	A
12	E
13	D
14	B
15	E
16	A
17	D
18	C
19	A
20	D
21	B
22	A
23	C
24	E
25	319
26	4438
27	2009
28	8
29	80
30	1998